תורת הקבוצות, תרגיל 10

תרגיל זה עוסק בהשלכות של אי קיום אקסיומת הבחירה.

הגדרה: קבוצה A היא סופית אם קיים $n \in N$ כך ש- A שקולה לקבוצה $\{1, 2, ..., n\}$.

הגדרה: קבוצה B היא סופית דדקינד אם אינה מכילה קבוצה בת מניה.

ניתן להוכיח, שבתורת הקבוצות ללא אקסיומת הבחירה הטענה שקיימת קבוצה סופית דדקינד שאינה סופית אינה מביאה לסתירה.

1. א. תהי A קבוצה סופית דדקינד, ו- B קבוצה סופית. הוכח, כי $A \cup B$ סופית דדקינד.
ב. תהיינה A, B קבוצות סופיות דדקינד. הוכח, כי $A \cup B$ קבוצה סופית דדקינד.
ג. האם קיימת קבוצה סופית דדקינד של מספרים טבעיים שאינה סופית (בהגדרה הרגילה)?

2. תהי A קבוצה סופית דדקינד שכל איבריה קבוצות סופיות דדקינד. נניח בנוסף, כי איברי A הן קבוצות זרות בזוגות. הוכח, כי האיחוד של A אף הוא קבוצה סופית דדקינד.

3. הוכח, כי קבוצה סופית דדקינד אינה שקולה לאף קבוצה חלקית ממש שלה.

4. תהי A קבוצה סופית דדקינד ותהי A_n קבוצת הסדרות באורך n המורכבות מאיברים שונים של A.
א. האם A_n היא סופית דדקינד?
ב. האם $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ היא סופית דדקינד?

תאריך ההגשה: 1.6.2005